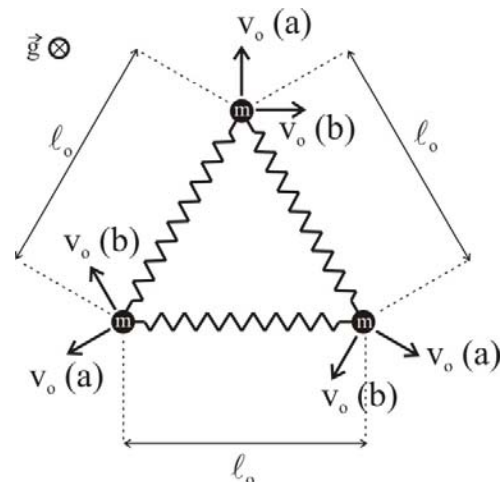


1. Tres partículas de masa m se encuentran sobre un plano horizontal ligadas entre sí por resortes idénticos de constante elástica k y largo natural ℓ_0 . Inicialmente el sistema forma un triángulo equilátero de lado ℓ_0 como muestra la figura. En esa condición se da a las partículas una rapidez inicial de magnitud v_0 .

- a) Si la dirección de la velocidad inicial es paralela a la mediana del triángulo que pasa por el vértice correspondiente (ver figura), determine el largo máximo que alcanzan los resortes. [2 puntos]
- b) Si la dirección de la velocidad inicial es perpendicular a la mediana del triángulo que pasa por el vértice correspondiente (ver figura), determine el valor que debe tener v_0 tal que el largo máximo que alcancen los resortes sea $2\ell_0$. [4 puntos]

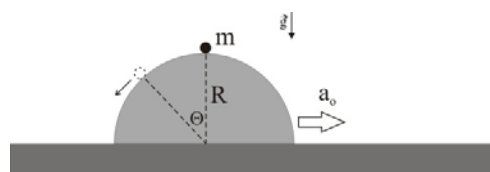


Indicaciones:

Considere que por la simetría del problema el triángulo se mantiene siempre equilátero. Desprecie todo roce.

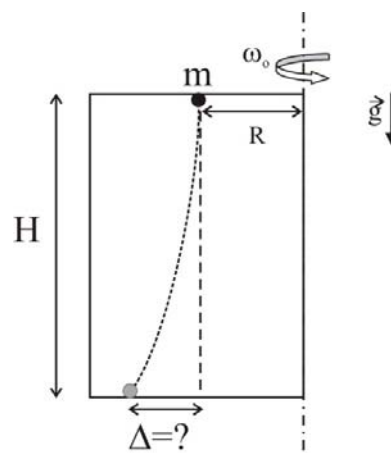
2. Una partícula de masa m está apoyada en la parte más alta de un semicilindro de radio R que descansa sobre una superficie horizontal. El roce entre la partícula y el semicilindro es despreciable. Si se imprime al semicilindro una aceleración a_0 constante hacia la derecha, partiendo desde el reposo, determine:

- a) El ángulo Θ en que la partícula pierde contacto con el semicilindro.
- b) La distancia detrás del semicilindro en que la partícula impacta la superficie horizontal.



3. Una puerta de altura H gira en torno a un eje vertical que pasa por uno de sus bordes con velocidad angular constante ω_0 . Una partícula de masa m es liberada desde el reposo relativo a la puerta, estando en el borde superior de la cara frontal de la puerta y a una distancia R del eje de rotación. Se pide determinar:

- a) El tiempo que tarda la partícula en salir por el borde inferior de la puerta.
- b) El desplazamiento radial neto Δ que recorre la partícula hasta el momento en que sale por el borde inferior de la puerta.
- c) La magnitud de la fuerza que la puerta ejerce sobre la partícula justo antes de salir por el borde inferior.



Indicaciones: Suponga que la puerta es suficientemente ancha tal que la partícula se escapa siempre por su borde inferior. Desprecie todo roce.

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

P1

1/2

a)



$$EMT = 3 \times \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{cte} = K + V$$

largo max $\rightarrow K=0 \rightarrow$

$$V = 3 \times \frac{1}{2} k \delta_{\max}^2 = \frac{3}{2} m v_0^2$$

$$\rightarrow \delta_{\max}^2 = \frac{m}{k} v_0^2$$

$$\rightarrow L_{\max} = L_0 + \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

b)

$$EMT = \frac{3}{2} m v_0^2$$

pero ahora hay rotación

general: $EMT = 3 \cdot \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{3}{2} k \delta^2$

en largo máximo $\dot{r}=0$ $r=r_*$ $\dot{\theta}=\dot{\theta}_*$ $\delta=\delta_*$

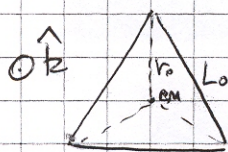
$$EMT = \frac{3}{2} m (r_* \dot{\theta}_*)^2 + \frac{3}{2} k \delta_*^2 = \frac{3}{2} m v_0^2$$

$$(r_* \dot{\theta}_*)^2 + \frac{k}{m} \delta_*^2 = v_0^2 \quad (*)$$

La velocidad angular la encontramos usando el Momento angular.

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}^{EXT} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{cm} = cte = 3mr_0 v_0 (-\hat{k})$$



$$r_0 = \frac{2}{3} L_0 \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} L_0$$

$$\therefore \vec{L}_{cm} = -3m \frac{L_0}{\sqrt{3}} v_0 \hat{k} = -\sqrt{3} m L_0 v_0 \hat{k}$$

en condición general:

$$\vec{L}_{cm} = 3mr^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\Rightarrow 3mr^2 \dot{\theta} = -\sqrt{3} m L_0 v_0$$

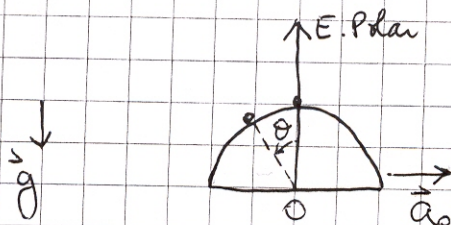
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_0 v_0}{r^2}}$$

$$\text{en (*)} : \left(\frac{L_0 v_0}{\sqrt{3} r_*} \right)^2 + \frac{k}{m} \delta_*^2 = v_0^2$$

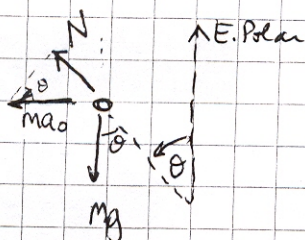
$$\text{queremos que } L_{max} = 2L_0 \rightarrow \delta_* = L_0$$

$$r_* = \frac{1}{\sqrt{3}} 2L_0$$

$$\Rightarrow v_0^2 \left(1 - \left(\frac{L_0 \sqrt{3}}{\sqrt{3} 2L_0} \right)^2 \right) = \frac{k}{m} L_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{4k}{3m} L_0^2}$$



DCL em SRNI



$$\hat{r}: -mR\ddot{\theta}^2 = N - mg \cos \theta + ma_0 \sin \theta \quad (1)$$

$$\hat{\theta}: mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta + ma_0 \cos \theta \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta + \frac{a_0}{R} \cos \theta$$

$$\ddot{\theta} \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta + \frac{a_0}{R} \cos \theta$$

$$\int_0^{\theta} \ddot{\theta} d\theta = \int_0^{\theta} \left(\frac{g}{R} \sin \theta + \frac{a_0}{R} \cos \theta \right) d\theta$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} [-\cos \theta]_0^{\theta} + \frac{a_0}{R} [\sin \theta]_0^{\theta}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} (1 - \cos \theta) + \frac{a_0}{R} \sin \theta \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow N = mg \cos \theta - ma_0 \sin \theta - mR \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

(3) en (4):

$$N = mg \cos \theta - ma_0 \sin \theta - mR \left(\frac{2g}{R} (1 - \cos \theta) + \frac{2a_0}{R} \sin \theta \right)$$

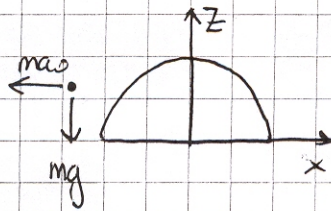
$$N = mg \cos \theta (1 + 2) + ma_0 \sin \theta (-1 - 2) - 2mg$$

$$N(\theta_D) = 0 = 3mg \cos \theta_D - 3ma_0 \sin \theta_D - 2mg$$

$$\boxed{\cos \theta_D - \frac{a_0}{g} \sin \theta_D = \frac{2}{3}} \quad \text{ecuación para } \theta_D \quad (5)$$

b) Después del despegue.

i) Usando SRNI



$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega^2 x \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned} \quad (6)$$

Condiciones "iniciales" (en el despegue)

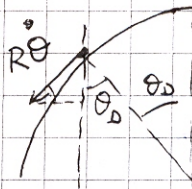


Posición

$$x(0) = -R \sin \theta_0 \quad (7)$$

$$z(0) = R \cos \theta_0$$

Velocidad (relativa)



$$\dot{z}(0) = -v_D \sin \theta_0 \quad (8)$$

$$\dot{x}(0) = -v_D \cos \theta_0$$

$$\text{con } v_D = R \dot{\theta} \big|_{\theta=\theta_0} \quad (\text{conociendo (3)})$$

la ecuación general de (6) es:

$$\ddot{z} = -g$$

$$\rightarrow z = A + Bt - \frac{g}{2} t^2 \quad \dot{z} = B - gt$$

imponiendo condiciones iniciales:

$$z(0) = R \cos \theta_0 \Rightarrow A = R \cos \theta_0$$

$$\dot{z}(0) = -v_0 \sin \theta_0 \rightarrow$$

$$B - g \cdot 0 = -v_0 \sin \theta_0$$

$$\Rightarrow z = R \cos \theta_0 - v_0 \sin \theta_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$z(0) = 0 \rightarrow \text{calcula } R$$

Momento en X (de (6))

$$\ddot{x} = -a_0$$

$$x = C + Dt - \frac{a_0}{2} t^2$$

Cond. iniciales

$$x(0) = -R \sin \theta_0 \rightarrow C = -R \sin \theta_0$$

$$\dot{x}(0) = -v_0 \cos \theta_0 \rightarrow D = -v_0 \cos \theta_0$$

5

80

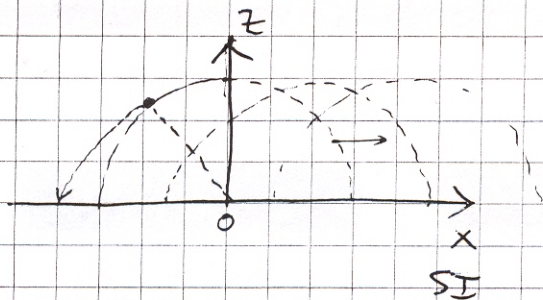
$$X = -R \sin \theta_0 - v_0 \cos \theta_0 \cdot t - \frac{a_0}{2} t^2$$

La distancia que llega respecto al centro de la esfera es

$$D = |X(t)| = \left| -R \sin \theta_0 - v_0 \cos \theta_0 t - \frac{a_0}{2} t^2 \right|$$

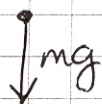
donde v_0 , θ_0 , t son ya conocidos.

ii) Podemos intentar resolver la parte b)
usando un SR Inercial



es SI que usamos lo utilizamos
en el centro de la semiesfera en el momento
que la partícula se despega. Después
del despegue la semiesfera se sigue
moviendo a la derecha y la partícula
lo hace en momento parabólico hacia
la izquierda.

DCL en el SI:
(después del
despegue)



o.e. de mto:

$$m \ddot{x} = 0$$

$$m \ddot{z} = -mg$$

Para resolver el sistema de ecuaciones necesitaremos las condiciones iniciales referidas ~~de~~ al SI:

$$x(0) = -R \sin \theta_D$$

$$z(0) = R \cos \theta_D$$

(igual que en el caso i)
(pero en el instante inicial los 2 sistemas coincidían).

Las velocidades iniciales cambian respecto al caso i). y por ahora se deben referir al SI.

Ya que lo que conocemos en $t=0$ es la velocidad relativa \vec{v}_D , debemos usar la relación cinemática

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}_e \times \vec{r}' + \vec{v}_0$$

en este caso $\vec{\omega}_e = 0$

$$\vec{v}' = -v_D \cos \theta_D \hat{i} - v_D \sin \theta_D \hat{k}$$

(notar que $\hat{i} = \hat{i}'$, $\hat{k}' = -\hat{k}$ en este caso).

y \vec{v}_0 alt: $\vec{v}_0 \hat{x}$
 \uparrow no lo sabemos, pero no
 debemos ignorar al final

así las ecuaciones a resolver son

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

$$x(0) = -R \sin \theta_0$$

$$z(0) = R \cos \theta_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 - v_0 \cos \theta_0$$

$$\dot{z}(0) = -v_0 \sin \theta_0$$

Las ecuaciones en z son exactamente
 iguales al caso i) por lo que
 obtengo el mismo t_0 .

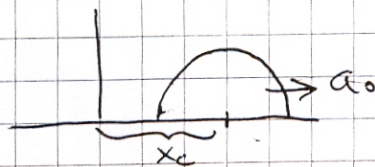
Las ecuaciones en x me permiten calcular
 el x_{final} en el SI.

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{cte} = \dot{x}(0) = v_0 - v_0 \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow x_f = (v_0 - v_0 \cos \theta_0) \cdot t_0 - R \sin \theta_0$$

(notar que $x_f < 0$)

Si embargo, esta no es la solución final de lo pedido, pues sebo agregar la distancia que se movió el centro de la semiesfera hacia la derecha.



en $t = 0$ $x_c = 0$

y se tiene $\dot{x}_c \Big|_{t=0} = v_0$

$\ddot{x}_c = a_0$

$$\Rightarrow x_c = v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

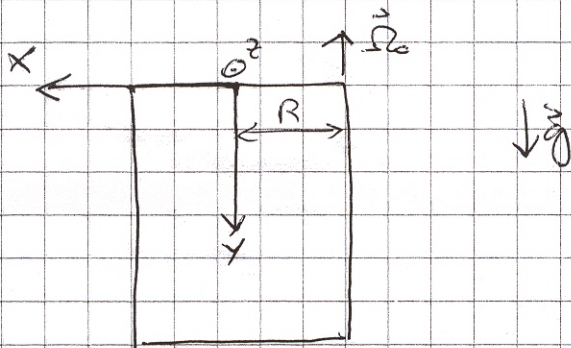
$$\therefore x_{cf} = v_0 \tau + \frac{a_0}{2} \tau^2$$

y la solución final es

$$L = x_{cf} + |x_f| = \sqrt{2} \cos \theta_0 \tau + \frac{a_0}{2} \tau^2 + R \sin \theta_0$$

que es = a lo obtenido en el método i)

P3



$$\vec{\Omega}_0 = -\Omega_0 \hat{j}$$

$$\vec{A}_0 = -R\Omega_0^2 \hat{i}$$

Fuerzas derivadas:

$$-m\vec{A}_0 = mR\Omega_0^2 \hat{i}$$

$$\begin{aligned} -2m\vec{\Omega}_0 \times \vec{v} &= -2m(-\Omega_0 \hat{j}) \times (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) \\ &= -2m\Omega_0 \dot{x} \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{\Omega}_0 \times \vec{r} = -\Omega_0 \hat{j} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = \Omega_0 x \hat{k}$$

$$\begin{aligned} -m\vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}) &= -m(-\Omega_0 \hat{j}) \times (\Omega_0 x \hat{k}) \\ &= m\Omega_0^2 x \hat{i} \end{aligned}$$

$$-m\vec{\Omega}_0 \times \vec{r} = \vec{0}$$

Fuerzas reales:

$$\vec{N} = N \hat{k}$$

$$m\vec{g} = mg \hat{j}$$

ecuaciones de movimiento:

$$\hat{x}): \quad m \ddot{x} = m R \Omega_0^2 + m \Omega_0^2 x \quad (1)$$

$$\hat{y}): \quad m \ddot{y} = m g \quad (2)$$

$$\hat{z}): \quad 0 = N - 2m \Omega_0^2 x \quad (3)$$

a) : Movimiento vertical es caída libre:

$$(2) \rightarrow \ddot{y} = g \rightarrow \dot{y} = gt \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = H \rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

$$b) \quad \ddot{x} = \Omega_0^2 (R + x)$$

cambio de variables. $u \equiv R + x$

$$\ddot{u} = \Omega_0^2 u$$

$$u = A e^{\Omega_0 t} + B e^{-\Omega_0 t}$$

$$\dot{u} = A \Omega_0 e^{\Omega_0 t} - B \Omega_0 e^{-\Omega_0 t}$$

$$\left. \begin{aligned} u(0) = R &\rightarrow A + B = R \\ \dot{u}(0) = 0 &\rightarrow A - B = 0 \end{aligned} \right\} A = B = \frac{R}{2}$$

$$\therefore u(t) = \frac{R}{2} (e^{\Omega_0 t} + e^{-\Omega_0 t})$$

3/3

$$\rightarrow x = R - \frac{R}{2} (e^{\Omega t} + e^{-\Omega t})$$

$$\Delta = x(\bar{t}) = R - \frac{R}{2} (e^{\Omega \bar{t}} + e^{-\Omega \bar{t}})$$

c) $(3) \rightarrow N = 2m\Omega_0 \dot{x}$

$$\rightarrow \dot{N}(\bar{t}) = 2m\Omega_0 \dot{u}(\bar{t})$$

$$= 2m\Omega_0 \frac{R}{2} \Omega_0 (e^{\Omega_0 \bar{t}} - e^{-\Omega_0 \bar{t}})$$

$$N = mR\Omega_0^2 (e^{\Omega_0 \bar{t}} - e^{-\Omega_0 \bar{t}})$$